

Sesión preparatoria OME

11 de enero de 2019

1. Probar que:

- a) La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de \mathbb{R}^3 a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.
- b) Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.
- c) Misma cuestión que las anteriores para la suma de los cubos de las distancias.

2. Los términos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 de una progresión geométrica son enteros positivos. Todos son menores que 2008, a_2 es divisible por 5, a_3 es divisible por 4, a_4 es divisible por 3, a_1 no es divisible por 6, y ningún número primo divide a todos ellos a la vez. Determinar los términos de la sucesión.

3. Encuentra todos los números reales positivos x que cumplen la ecuación

$$x + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3x}{5} \right\rfloor,$$

donde $\lfloor a \rfloor$ es la parte entera de a .

4. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula 9×9 . ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de la prueba es de 3 horas.**